www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MAT90

CONCOURS RESEAU ESCO

MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures

OPTION = TECHNOLOGIE

PARTIE I

On considère les matrices carrées d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} \ln\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \ln\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\ln 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(la notation $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x).

1. a) Déterminer la matrice M telle que $A = M + N$
   b) Calculer les puissances M^n et N^n pour tout entier $n \geqslant 2$.
   c) Vérifier que $M \times N = N \times M$.

2. Déduire de la question 1. le calcul de A^n pour $n \geqslant 1$.
   On écrira clairement les neuf coefficients de la matrice A^n.

PARTIE II

Soient a, b, c des nombres réels.
On considère la fonction f qui, à tout réel x associe : $f(x) = \dfrac{(ax + b)\, 2^x + c}{3^x}$

On note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f (et $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$).

1. On se propose de montrer dans cette question que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver des réels a_n, b_n, c_n tels que $f^{(n)}(x)$ s'écrive pour tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(a_n x + b_n)\, 2^x + c_n}{3^x} \qquad (1)$$

   a) Calculer $f'(x)$.
   En déduire les expressions de a_1, b_1, c_1 en fonction de a, b, c.
   Ecrire les relations obtenues sous forme matricielle.

   b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le réel $f^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme (1) et que les nombres a_n, b_n, c_n vérifient :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

où A est la matrice définie dans la Partie I et $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$.

.../...

2. a) Calculer, en utilisant I.2), les nombres a_n, b_n, c_n en fonction de a, b, c et n.

   b) En déduire l'expression de $f^{(n)}(1)$ en fonction de a, b, c et n.

   c) Déterminer les coefficients a, b, c pour lesquels la fonction f vérifie les trois conditions suivantes :

$$f(1) = 0 \quad ; \quad f'(1) = \frac{1}{3}\ln 4 \quad ; \quad f''(1) = \frac{2}{3}\ln 2 \cdot \ln\frac{2}{9}$$

3. On suppose dans la suite de cette partie, que a = 0, b = 1 et c = - 2. On appelle (C) la courbe représentative de f.

   a) Etudier les variations de f.

   b) Etudier les branches infinies de la courbe (C).

   c) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on déterminera.
   Ecrire une équation de la tangente à (C) en ce point.

   d) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion.
   Donner une valeur approchée, arrondie à 10^{-2} près, de ses coordonnées.

   e) Construire la représentation graphique (C).

PARTIE III

Une urne contient 4 boules vertes et 12 boules blanches. On dispose par ailleurs d'une réserve de boules de chaque couleur.

On considère des tirages successifs d'une boule de l'urne. Après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne et avec elle, 3 boules supplémentaires (prélevées dans la réserve) de la même couleur que la couleur tirée.

Exemple : si on tire une boule verte, on remettra 4 boules vertes dans l'urne.

Pour $n \geqslant 1$, on appelle X_n la variable aléatoire qui prend la valeur :

0 si on tire une boule verte au n-ième tirage,

1 si on tire une boule blanche au n-ième tirage.

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

.../...

1. Déterminer la loi de X_1 et calculer l'espérance $E(X_1)$ de X.

2. a) Calculer les probabilités conditionnelles

$$p(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) \text{ et } p(X_2 = 0 \mid X_1 = 1)$$

b) En déduire la loi conjointe du couple (X_1, X_2) puis la loi de X_2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. a) On a obtenu 2 boules blanches exactement lors des dix premiers tirages. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au onzième tirage ?

b) Plus généralement, calculer pour $0 \leqslant k \leqslant n$ les probabilités

$$p(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)$$

en fonction de k et n.

b) En déduire que :

$$p(X_{n+1} = 1) = \frac{12 + 3\,E(S_n)}{16 + 3n}$$

d) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$p(X_n = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad E(S_n) = \frac{3n}{4}$$

• • •
•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail